

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

2007-2008
SMA-SMI
Algèbre 2

CONTROLE 2 (*durée* : 1h30)

Exercice 1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $a_1, \ldots, a_p$ des vecteurs de E. Montrer que :

1. $(f(a_1), \ldots, f(a_p))$ est liée et f est injective $\Longrightarrow (a_1, \ldots, a_p)$ est liée.

2. $(f(a_1), \ldots, f(a_p))$ est libre $\Longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_p)$ est libre et
$\mathtt{Vect}\{a_1, \ldots, a_p\} \cap \ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et on considère le déterminant d'ordre $n \geq 2$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

1) Calculer D_2 et D_3.

2) Trouver une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1}.

3) En déduire la valeur de D_n.



Exercice 3 :
Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, avec $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (0, 1, -1)$, $e'_3 = (0, 1, 1)$, est une base de E.
2. Ecrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

Pour toute matrice carrée M d'ordre 3, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n(M) = I_3 + \frac{1}{1!}\, M + \frac{1}{2!}\, M^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\, M^n.$$

4. Montrer que $T_n(A) = PT_n(D)P^{-1}$.
5. Calculer $T_n(D)$ sous forme matricielle, puis $\lim_{n \to +\infty} T_n(D)$.
6. En déduire $\lim_{n \to +\infty} T_n(A)$.

Indications :
- On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!}\, x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\, x^n\right) = e^x$.
- Si $M_n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)$ est une suite de matrices dépendant de n, on définit $\lim_{n \to +\infty} M_n$ comme étant la matrice $\left(\lim_{n \to \infty} a_{ij}^{(n)}\right)$.
- La matrice $\lim_{n \to +\infty} T_n(M)$ s'appelle l'*exponentielle* de la matrice M.




ETUSUP.com